



【课堂研究·特设专栏：HPM 课例研究（之十九）】

# HPM 视角下的“余弦定理”教学

杜金金<sup>1</sup>，林庄燕<sup>2</sup>，沈中字<sup>3</sup>

(1. 上海市建平中学，上海 200135；

2. 福建省厦门第一中学，福建厦门 361003；

3. 华东师范大学 数学科学学院，上海 200241)

【摘要】余弦定理是高中数学的重要定理之一，它表达了三角形的边角关系，内涵丰富，用途广泛。教师从 HPM 视角设计本节课的教学，通过展现余弦定理不同历史阶段的表现形式和证明方法，呈现几何与代数的统一。教师从几何背景的介绍、几何方法的推导和几何定理的联系等方面进行教学，让学生对余弦定理的认知从定理公式上升为几何关系，进一步发展学生数学核心素养，实施数学学科德育。

【关键词】HPM；余弦定理；勾股定理；核心素养

## 一、引言

余弦定理是高中数学的重要定理之一，它表达了三角形的边角关系，内涵丰富，用途广泛<sup>[1]</sup>。《普通高中数学课程标准（2017年版）》指出，借助向量的运算，探索三角形边长与角度的关系，掌握余弦定理，能用余弦定理解简单的实际问题<sup>[2]</sup>。在沪教版高中一年级第二学期的数学教材中，余弦定理是第5章“三角比”中第三节“解斜三角形”的内容。从初中到高中，学生经历了从“解直角三角形”到“解斜三角形”的转变，随着知识抽象程度的提高以及应用范围的扩大，教师需要进一步在余弦定理的课堂中落实数学核心素养。

在教学实践中，许多教师对余弦定理的教学进行了探索，有的教师通过创设测量两点间距离的情境，将其抽象为已知三角形两边及其夹角，

求第三条边的问题<sup>[3]</sup>；有的教师直接从已知三角形两边及其夹角解三角形入手<sup>[4]</sup>；有的教师从探究一般三角形三边平方之间的关系入手<sup>[5]</sup>；还有的教师直接从三角形三边所对应向量之间的运算出发，形成余弦定理<sup>[6]</sup>。向量虽然是解决问题的有效工具，但是如果简单交给学生，不利于提高学生的思维水平，因此教师需要在教学中创设相应的情境<sup>[7]</sup>。同时，余弦定理是勾股定理推广的产物<sup>[8]</sup>，在教学中突出直角三角形与一般三角形的关系是十分恰当的<sup>[9]</sup>。

在历史上，余弦定理最先以几何定理的形式出现，到后期才出现三角形式，而且主要用于解决“已知三角形三边求各角”的问题<sup>[10]9-13</sup>。余弦定理的历史不仅为教师的教学提供借鉴，而且让学生的学习聚焦本源。因此，数学史的融入让余弦定理的教学始于几何，终于几何。在教学过

【作者简介】杜金金，上海市建平中学数学教师，主要研究方向为高中数学课堂教学；林庄燕，福建省厦门第一中学数学教师，主要研究方向为数学史与数学教育；沈中字，华东师范大学数学科学学院在读博士研究生，主要研究方向为数学史与数学教育。

【基金项目】上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”（A8）