



【课堂研究·特设专栏：HPM 课例研究（之十七）】

HPM 视角下的“轨迹”概念同课异构课例研究

张佳淳，汪晓勤

（华东师范大学 教师教育学院，上海 200062）

【摘要】“轨迹”是沪教版初中数学八年级上册的内容，对于该课的教学设计，已有的研究不多且存在些许问题。文章采用 HPM 课例评析框架，对两位教师执教的“轨迹”概念课例进行比较分析，呈现数学史在能力之助、探究之乐、文化之魅和德育之效等方面的教育价值。

【关键词】HPM；轨迹；同课异构

“轨迹”是沪教版初中数学八年级上册的内容，现有的教学设计大多先利用实例形成表象认识，再结合字面剖析轨迹概念，接着辨析三个基本轨迹，最后探求轨迹图形^[1-3]。虽然有研究者对此内容做过研究，但还是存在些许问题，如教师不明确教学目的，对为什么要教授“轨迹”心中无数^{[1]39-43}；学生也不明白轨迹学习的必要性等。另外，很多教师对于轨迹概念的历史知之甚少，HPM 视角下的“轨迹”概念教学设计更是付之阙如。

鉴于此，HPM 工作室开展了“轨迹”概念的课例研究。本课例的执教者分别是教师 A 和教师 B，他们都从 HPM 的视角经历了选题与聚焦、研讨与设计、实施与评价的课例研究过程，但由于学校文化、教师旨趣、学生基础、史料选择、教学目标、教学设计等方面的差异，最终形成了效果不同、各具特色的两个课例。笔者采用 HPM 课例评析框架^[4]，对两位教师如何选择和应用数学史，数学史在两节课中各体现的教育价值，以及两节课各自的特色等进行比较分析，以期“轨迹”概念教学以及 HPM 课例研究提供借鉴。

一、历史素材

唐代诗人王维有诗云：“大漠孤烟直，长河落日圆。”实际上，直线和圆是人们在现实生活中所见的形象经过抽象而成的几何概念，欧几里得在《几何原本》中给出两者的静态定义。古希腊人使用尺规来作图，在尺规作图的动态过程中，古希腊人感悟到静态的直线和圆，其实是通过点的运动而形成的两种轨迹，从而产生轨迹的概念。另外，现实世界物体的运动、天体的运动、流星等现象也会促进他们对轨迹的认识。公元前 4 世纪，古希腊数学家阿契塔明确提出了“曲线是点的轨迹”的观点^[5]。

在利用尺规解决三大几何难题（化圆为方问题、三等分角问题、倍立方问题）遭遇失败后，古希腊数学家开始用新的轨迹来解决问题。公元前 5 世纪，希皮亚斯利用正方形相邻两边的运动构造了新的轨迹——割圆曲线^[6]；公元前 3 世纪，阿基米德则构造了沿射线运动的一点，当射线本身绕端点沿逆时针方向旋转时的轨迹——阿基米德螺线^[7]。割圆曲线和阿基米德螺线都可以用来解决三等分角问题。

【作者简介】张佳淳，华东师范大学教师教育学院在读硕士研究生，主要从事数学史与数学教育研究；汪晓勤（本文通讯作者），华东师范大学教师教育学院教授，博士生导师，主要从事数学史与数学教育研究。

【基金项目】上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中如何落实立德树人研究”（A8）