



【课堂研究·特设专栏：HPM 课例研究（之十五）】

HPM 视角下 “两角和与差的余弦公式”课例研究

马艳荣¹，汪晓勤²

(1. 北京师范大学银川学校，宁夏银川 750011；
2. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062)

【摘要】两角和与差的正弦和余弦公式常常被称为平面三角学基本公式，用其中任何一个公式都能推导出其他公式。研究者从学生已有的认知基础出发，以相关数学史料为主线，通过设置层层递进的问题串，引导学生经历两角和与差的余弦公式的发现和推导过程，从而以重构式将数学史融入数学教学中，发挥学生的主观能动性，让学生探究出历史上的几何模型，体验知识的发生和发展过程。

【关键词】HPM；问题串；重构式

一、引言

两角和与差的正弦和余弦公式常常被称为平面三角学基本公式，用其中任何一个公式都能推导出其他公式。在数学史上，两角和与差的正弦和余弦公式源于编制弦表的需要，因此，它们几乎伴随着三角学的诞生而诞生。在西方早期三角学教科书中，这些公式的几何推导方法精彩纷呈^[1]。

现行各种版本的高中数学教科书大多以两角差的余弦公式作为出发点，只是所采用的引入方式和证明方法各有不同。初学者面对形式对称的两角和与差的余弦公式，常常会产生以下疑问：为何不按照三角函数的学习顺序，先讲两角和与差的正弦，再讲两角和与差的余弦？这样的公式一开始究竟是如何想到的？为何要引进两角和与差的正弦和余弦公式？

根据学生和教师的调查表明，学生在学习两角和与差的余弦公式时，存在以下困难：(1) 难以想到用向量法或两点间距离公式来推导两角差的余弦

公式；(2) 用两点间距离公式推导两角差的余弦公式时，难以想到差角的构造；(3) 利用帕普斯模型推导公式时，在用线段量角度、角的转化与表示、添加辅助线构造等量关系等步骤上存在一定困难。

已有的 HPM 视角下的教学设计^[2-3]并没有很好地解决上述问题。鉴于此，教师设置层层递进的问题串，引导学生经历两角和与差的余弦公式的发现和推导过程，从而以重构式将数学史融入数学教学中。拟订的教学目标如下。

(1) 能够对两角和与差的余弦公式进行简单且正确的应用（主要是化简、求值），能够进行简单三角恒等变换。

(2) 经历两角和与差的余弦公式的推导和证明过程，体验探究之乐，理解公式的多种证明方法，进一步感受方法之美。

(3) 领会数形结合思想以及转化思想，培养学生直观想象素养和逻辑推理素养。

(4) 感受数学文化的魅力，感悟数学的人文精神。

【作者简介】马艳荣，中学教师，主要从事中学数学课堂教学研究；汪晓勤（通讯作者），教授，博士生导师，主要从事数学史与数学教育研究。