【课堂研究】

一类行程问题的深度剖析

罗增儒
（陕西师范大学　数学与信息科学学院，西安　710062）

【摘　要】对于一类涉及相遇和追及的行程问题，本文借助“线段图”进行了数量关系的多维度分析，并对多个解法进行了“哪个思路更接近问题深层结构”的比较，既呈现了案例求解的具体步骤（求路程差、求时间、求路程），又呈现了数学解题的思维过程（理解题意、思路探求、书写表达、回顾反思）。

【关键词】行程问题；思路探求；数学解题

行程问题可以有一个物体的运动，也可以有多个物体的运动；运动的路线可以是直线形的，也可以是环形的；多个物体的运动可以有“相向运动”（相遇问题）、“同向运动”（追及问题）和“相背运动”（相离问题）等，情况虽然很多，但题型特征的“基本关系”都是：

路程＝速度×时间　①

①可以变形为：

速度＝路程÷时间　②

时间＝路程÷速度　③

在这个基本关系中，由于出发时间、出发地点、运动方向、运动路线、运动结果等方面的不同，路程、速度、时间三要素的具体含义又会呈现反映题目特点的“相等关系”。比如，当两个物体“相向运动”或“相背运动”时，其相对运动的“速度”等于“两个物体运动速度的和”（路程＝速度和×时间，时间＝路程÷速度和）；而当两个物体“同向运动”时，其追及的“速度”又等于“两个物体运动速度的差”，这时，上述公式对于“追及问题”又具体表示为：

路程差＝速度差×时间　④

速度差＝路程差÷时间　⑤

时间＝路程差÷速度差　⑥

求解行程问题的关键是既要抓住反映题型特征的“基本关系”，又要抓住反映题目特点的“相等关系”。为了更好地把握这些数量关系，我们可以画出线段图、矩形图或表格来帮助理解。下面，以一道具体题目为例说明。

例1　甲、乙两人同时从 A 地出发前往 B 地，甲每分钟走 80 米，乙每分钟走 60 米。甲到达 B 地后，休息了半个小时，然后返回 A 地，甲离开 B 地 15 分钟后与正向 B 地行走的乙相遇，AB 两地相距多少米？

这道行程问题难住了好多学生，也难住了一些老师。有学生来问我这道题怎么求解，我很快就找出了答案，但使用的是二元一次方程组。怎样用小学算术的方式给学生讲清楚、说明白呢？这确实是一个颇具思维含量的问题。

一、理解题意：弄清条件是什么，结论是什么，各有几个

条件有 4 个：

条件1：甲、乙两人同时从 A 地出发前往 B 地，关键信息是同时出发、同向 B 地；

条件2：给出了速度，甲每分钟走 80 米，乙每分钟走 60 米；

条件3：甲到达 B 地后，休息了半个小时，乙一直不停地向 B 地行走。在这里，甲休息了半个小时

【作者简介】罗增儒，陕西师范大学教授，博士研究生导师，中国教育学会中学数学教学专业委员会学术委员，中国数学奥林匹克首批高级教练。

(30分钟)，如何认识、怎样处理这半小时，是一个让人纠结的问题。

条件4：甲休息后返回A地，15分钟后与正向B地行走的乙相遇。在这里，题目的关键信息是甲与乙15分钟后相遇，并表明甲、乙共同走了2个全程。

结论是：求AB两地的距离。

上述运动情况（题意）可示意为图1：甲、乙两人同时从A地出发前往B地，当甲到达B地时，乙到达C地；当甲在B地休息30分钟时，乙从C地到达D地；当甲离开B地返回A地时，15分钟后与乙在E地相遇。这个行程线段图，不仅直观而整体地呈现了题意，而且也直观具体地显示了当中的数量关系，有助于学生思路探求的开展和分析能力的培养。

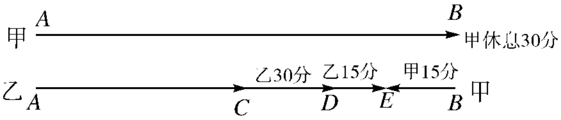

图1

二、思路探求：沟通条件与结论的联系，用运算式表示数量关系

由于已经知道甲、乙的速度，所以根据公式①，为了求AB两地的距离，需求出甲或乙从A地到B地的时间。那么，从甲的时间入手好还是从乙的时间入手好呢？由于甲走完了AB全程（而乙没有），所以，我们首先考虑甲从A到B的时间。③式和⑥式都提供了求时间的途径，但③式中的“路程”恰好是结论要求的，故我们首先（首先不是唯一）选择⑥式，通过“路程差”和“速度差”来求时间。

思路1：如图1，当甲从A地到达B地时，乙从A地到达C地，这时甲、乙之间的距离为CB，依题意可求得：

$60 \times 30 + (60 + 80) \times 15 = 3900$（米），

其中，CD段是“一个物体的运动”，DB段是“两个物体的相向运动”（相遇问题）。

路程CB是甲比乙多走的路程，除以甲、乙的速度差，就是甲从A到达B所用的时间（公式⑥）：

$3900 \div (80 - 60) = 195$（分），

从而可求得AB两地的距离为（公式①）：

$80 \times 195 = 15600$（米）。

三、回顾反思：至少可以有三点反思

反思1：由上述思路我们可以看到，3个运算式（求路程差、求时间、求路程）的得出，是不断揭示“相等关系”又不断使用“基本关系”的过程，将其写下来就是“书写表达”。从而，这个简短的步骤就呈现了数学解题的思维过程：理解题意、思路探求、书写表达、回顾反思（直观上就是看题、想题、写题、回题）。

反思2：根据这个更加直观的解释思路，我们也可以对图1做反向思考。如图2（对图1做简化理解），假设甲从B地出发走向A地的同时，乙从C地出发走向A地，则甲乙同时到达A地，这相当于乙在甲前方3900米的“追及问题”（实质），甲追上乙的时间为（公式⑥）：

$3900 \div (80 - 60) = 195$（分），

这也是甲从B地到A地的时间，故AB两地的距离为：

$80 \times 195 = 15600$（米）。

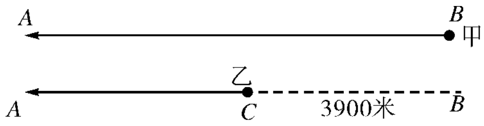

图2

反思3：因为甲从A地到达B地的时间，就是乙从A地到达C地的时间，所以，得出时间为195分钟后，也可以使用乙的速度来算路程（如图1）：

$60 \times (195 + 30 + 15) + 80 \times 15 = 15600$（米）。

这里，$195 + 30 + 15 = 240$分钟，正是“乙从A地到E地与甲相遇的时间”，这实际上告诉了我们另外的解题思路：求出乙与甲相遇所用的时间，从而求AB两地的距离。

思路2：如图3，当甲从A地到达B地时，乙从A地到达C地；甲到达B地后休息半个小时可以理解为用一半时间（15分钟）继续由B地到F地，又立即用一半时间由F地回到B地，这时，乙从C地到达D地；当甲离开B地返回时，15分钟后与乙在E地相遇。

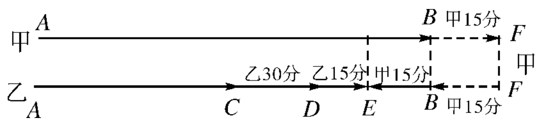

图3

所以，甲、乙相遇时，甲比乙多走了两段 EF 路程：

$80\times(30+15\times2)=4800$（米），

则乙从 A 地出发到相遇所用的时间为：

$80\times(30+15\times2)\div(80-60)=240$（分），

得 AB 两地的距离为：

$60\times240+80\times15=15600$（米）。

思路 3：从乙的角度思考，思路 1 是先求乙从 A 地到 C 地所用的时间（也是甲从 A 地到 B 地所用的时间），思路 2 是先求乙从 A 地到 E 地所用的时间（也是乙与甲相遇的时间），当然还可以通过求出乙从 A 地到 B 地的时间来计算 AB 两地的距离，这只需把甲走 BE 的时间转化为乙走 BE 的时间：乙走 BE 一段路程需要 $\frac{80\times15}{60}=20$ 分钟（如图 4）。于是，当乙从 C 地经过 D、E 地到 B 地时，共用了 $30+15+20=65$ 分钟，假设甲从 A 地到 B 地后继续走，则甲在这段时间内又走了：

$80\times(30+15+20)=5200$（米）。

这段路程是甲比乙多走的，除以甲、乙的速度差，就是乙从 A 地到 B 地的用时：

$[80\times(30+15+20)]\div(80-60)=260$（分），

得 AB 两地的距离为：

$60\times260=15600$（米）。

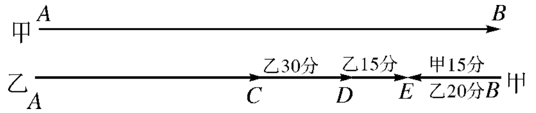

图 4

四、一般化：把思考引向深入

上面我们提供了三个思路，都得到同样的结论，步骤也大体相同：第一步，求路程差；第二步，除以速度差得时间；第三步，由速度、时间得路程。那么，哪个思路更接近问题的深层结构呢？想必读者已经有所感觉，在此处将问题一般化后会看得更加清楚。

例 2　甲、乙两人同时从 A 地出发前往 B 地，甲每分钟走 v_1 米，乙每分钟走 v_2 米（$v_1>v_2$）。甲到达 B 地后，休息了 t_1 分钟，然后返回 A 地，甲离开 B 地 t_2 分钟后与正向 B 地行走的乙相遇，AB 两地相距多少米？

解法 1：参看图 1，当甲从 A 地到达 B 地时，乙从 A 地到达 C 地，这时甲、乙之间的距离为 CB，依题意可求得：

$\Delta S=v_2t_1+(v_1+v_2)t_2$（米），

或 $v_1t_2+v_2(t_1+t_2)$（米）。

则甲从 A 地到达 B 地所用的时间为：

$$t=\frac{\Delta S=}{\Delta v=}=\frac{v_2t_1+(v_1+v_2)t_2}{v_1-v_2}\text{（分）},$$

得 AB 两地的距离为：

$$S=v_1t=\frac{v_1v_2t_1+v_1(v_1+v_2)t_2}{v_1-v_2}\text{（米）},\qquad ⑦$$

$$\text{或 } S=\frac{v_1^2t_2+v_1v_2(t_1+t_2)}{v_1-v_2}\text{（米）。}\qquad ⑧$$

解法 2：参看图 1，当甲从 A 地到达 B 地时，乙从 A 地到达 C 地，这时甲、乙之间的距离为 CB，依题意可求得：

$\Delta S=v_2t_1+(v_1+v_2)t_2$（米）。

这时我们做反向思考，参看图 2，假设甲从 B 地出发走向 A 地的同时，乙从 C 地出发走向 A 地，则甲、乙同时到达 A 地，这相当于乙在甲前方 $v_2t_1+(v_1+v_2)t_2$ 米的“追及问题”，甲追上乙的时间为：

$$t=\frac{\Delta S}{\Delta v}=\frac{v_2t_1+(v_1+v_2)t_2}{v_1-v_2}\text{（分）},$$

得 AB 两地的距离为⑦或⑧。

解法 3：参看图 3，当甲从 A 地到达 B 地时，乙从 A 地到达 C 地；甲到达 B 地后休息 t_1 分钟可以理解为用一半时间 $\left(\frac{t_1}{2}\text{ 分钟}\right)$ 继续由 B 地到 F 地，又立即用一半时间 $\left(\frac{t_1}{2}\text{ 分钟}\right)$ 由 F 地回到 B 地，这时，乙从 C 地到达 D 地；当甲离开 B 地返回时，t_2 分钟后与乙在 E 地相遇。因此，甲、乙相遇时，甲比乙多走了两段 EF 路程：

$\Delta S=v_1(t_1+2t_2)$（米），

则乙从 A 地出发到相遇所用的时间为：

$$t=\frac{\Delta S}{\Delta v}=\frac{v_1(t_1+2t_2)}{v_1-v_2}\text{（分）},$$

得 AB 两地的距离为：

$$S=AE+EB$$
$$=v_2\frac{v_1(t_1+2t_2)}{v_1-v_2}+v_1t_1\text{（米）},\qquad ⑨$$

可化为⑦或⑧式。

解法 4：如图 4，乙走 BE 一段路程需要 $\frac{v_1t_2}{v_2}$ 分钟，当乙从 C 地经过 D、E 地到 B 地时，共用了 $t_1+t_2+\frac{v_1t_2}{v_2}$ 分钟。假设甲从 A 地到 B 地后继续走，则甲在这段时间内又走了：

$$\Delta S=v_1\left(t_1+t_2+\frac{v_1t_2}{v_2}\right)(\text{米}),$$

则乙从 A 地到 B 地的用时为：

$$t=\frac{\Delta S}{\Delta v}=\frac{v_1\left(t_1+t_2+\frac{v_1t_2}{v_2}\right)}{v_1-v_2}(\text{分}),$$

得 AB 两地的距离为：

$$S=v_2t=v_2\times\frac{v_1\left(t_1+t_2+\frac{v_1t_2}{v_2}\right)}{v_1-v_2}(\text{米}),\quad ⑩$$

可化为⑦或⑧式。

对比四种解法的三个步骤（求路程差、求时间、求路程），我们可以看到，解法 1、解法 2 思路是相同的，它们在第一步求路程差的处理上，有优于解法 3、解法 4 的地方；第三步求路程也有简明性。

表现 1：入手选择的自然性

题目要计算 AB 两地的距离，因为甲走完了 AB 全程而乙始终没有走完，所以解法 1、解法 2 从“甲走完全程”入手具有选择的自然性。用图 2 来解释问题的实质（标准的追及问题）也非常方便。

表现 2：策略选择的明智性

在时间点上，解法 1、解法 2 只考虑“甲到达 B 地时”的“路程差”，这就避开了“甲到达 B 地后”的其他事情，如“休息了半个小时”如何处理等问题，都转移到“乙一直不停地向 B 地行走”上去了，体现策略选择的明智性，其求路程差的相应图示和计算结果也都比较简明。

从教学实践中可知，学生对“甲到达 B 地后，休息了半个小时”如何处理普遍纠结，对例 1 思路 2 中的“路程差”计算式 $80\times(30+15\times2)$ 也感到费解。为了更直观地解决学生的困难，我们提供了图 3，把“休息”理解为“一半时间前进、一半时间返回”的运动，但仍有学生疑惑：怎么能把“休息”理解为“运动”呢？对此，笔者期待读者提供更简明易懂的解释。

表现 3：结论表达的简洁性

四个解法第二步求时间虽然都是一样的：时间=路程差÷速度差，但保留了求“路程差”的差异，如解法 1、解法 2 较简洁，解法 4 较麻烦（还多了一步：把甲的 15 分钟变为乙的 20 分钟）等，因而，也就把“路程差”的差异带进最后的结果，表现为⑦、⑧式比⑨、⑩式简洁一些。

五、变式练习

对于以上案例，教师可以创设新的情境，引导学生做变式练习，以此训练学生的解题能力，促进学生对解题方法的掌握。如：

例 3　甲、乙两工程队一齐干一个土方工程，甲工程队一天可以挖 $80m^3$，乙工程队一天可以挖 $60m^3$，甲工程队挖掉整个工程的一半后，因有紧急任务调去干别的工作，30 天后回来与乙一起作业 15 天，工程完成，问整个工程量为多少 m^3？

例 4　有一个工程，甲工程队干一半需 195 天，乙工程队干一半需 260 天，甲、乙两工程队一齐开工，195 天后甲工程队有紧急任务，调去干别的工作，30 天后回来与乙一起作业直至工程完成，问整个过程一共干了多少天？

（感谢惠州市二十七小学四年级徐坤媞同学提供了写作素材。）